1.设R1和R2是集合A上的关系，且R1⊆R2，证明：

**(1) r(R1) ⊆r(R2)**

证明：r(R1) = R1∪IA, r(R2) = R2∪IA,因为R1⊆R2，所以R1∪IA ⊆ R2∪IA，即r(R1) ⊆r(R2)。

**(2)**

证明：,，因为，所以，所以，即

**(3) t(R1) ⊆t(R2)**

证明：,。现在只需证明：。显然，

假设当时，。

当时，,则使得,因为，所以，所以=。也即当时，。

综上，得证。

2. 设R是集合A上的关系，证明：

**(1) rs(R) = sr(R)**

证明：,

所以，。

**(2) rt(R) = tr(R)**

**证明：**

,

，

因为,所以对。所以。

为包含的最小的传递关系，而，且是可传递的，所以。

**(3) st(R) ⊆ ts(R)**

因为，所以。所以。因为对称，所以也对称，所以。所以。得证。

3.设 (Z+是正整数集)，在A上定义二元关系R如下：当且仅当，证明：R是一个等价关系。

证明：

(1)自反性：,因为,所以。所以是自反的。

(2)对称性：,若，则，那么，那么，所以R是对称的。

(3)传递性：, 若,那么,那么，那么,所以。所以是可传递的。

**4.设有集合A和A上的关系，对于所有的,若由和可推得，则称关系是循环的。试证明当且仅当是等价关系时，是自反且循环的。**

证明：

（1）是等价关系是自反且循环的。

因为是等价关系，所以是自反的。

,若,因为是可传递的，所以,又因为是对称的，所以。所以由可推得，因此是循环的。

（2）是自反且循环的是等价关系。

,若，因为是自反的，所以,

由于是循环的，所以由可推得。因此

,若,由于是循环的，所以,因为，所以。所以**。**

**所以。**

**5.如果 是集合 A 上的偏序关系，且 ，试证明：是B上的偏序关系。**

证明：

1. 自反性：,则是集合A上的偏序关系，所以，所以。
2. 反对称性：,若,则,因为是集合A上的偏序关系，所以，所以是反对称的。
3. 传递性：,若, 因为是集合A上的偏序关系，所以由有。又因为,所以。所以是可传递的。